CIMAT

Notas Sobre Programación Lineal

Francisco Sánchez S.

Febrero, 2006

CIMAT

Índice

1. Planteamiento del Problema.

Ejemplo.- La línea de producción de una fábrica de muebles para jardín tiene tres artículos: sillas, bancas y mesas. Estos artículos son producidos en dos etapas: doblado y armado. El tiempo requerido en cada uno de ellos se indica en la siguiente tabla:

	sillas	bancas	mesas	capacidad
doblado	1.2	1.7	1.2	1000
armado	0.8	0	2.3	1200

El beneficio que la fábrica recibe por la manufactura y venta de cada producto es: 3 unidades por silla, 3 por banca y 5 por mesa. La compañía desea un plan para seleccionar la combinación de productos para la siguiente temporada de ventas. El empresario supone que puede vender un número ilimitado de sus productos, pero sólo se cuenta con 2,000 metros de tubo metálico y se requieren 2 metros por silla, 3 metros por banca y 4.5 metros por mesa.

Este problema se puede plantear de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rrrcl}
1{,}2x_1 & +1{,}7x_2 & +1{,}2x_3 & \leq & 1000 \\
0{,}8x_1 & & +2{,}3x_3 & \leq & 1200 \\
2{,}0x_1 & +3{,}0x_2 & +4{,}5x_3 & \leq & 2000
\end{array} \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

El problema también puede escribirse como (forma canónica):

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = c'x \\
\text{s.a.} & \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{array} \tag{1.1}
$$

Definición 1. *A un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga 1.2 y 1.3 se le llama solución factible y a la función $c'x$ función objetivo.*

Definición 2. *A una solución factible x^* tal que $c'x^* \geq c'x$ para toda x factible, se le llama solución óptima.*

Se pretende encontrar la solución factible que maximice la función objetivo.

Si por cada restricción i se agrega una variable $h_i = \sum a_{ij}x_j - b_i$ que mida la brecha entre el lado izquierdo y derecho de la desigualdad (a estas variables se les conoce como de holgura), entonces se obtiene:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{cccccccc}
1{,}2x_1 & +1{,}7x_2 & +1{,}2x_3 & +h_1 & & & = & 1000 \\
0{,}8x_1 & & +2{,}3x_3 & & +h_2 & & = & 1200 \\
2{,}0x_1 & +3{,}0x_2 & +4{,}5x_3 & & & +h_3 & = & 2000
\end{array} \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

en forma matricial:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = c'x \\
\text{s.a.} & \\
& Ax + h = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

o bien en la forma:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = c'x \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad \mathbf{A}x = b \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

donde $c' = (c', 0)$, $x' = (x', h')$ y $\mathbf{A} = [A, I]$. Cuando el problema se presenta en ésta forma, se dice que está en la forma estandard. Cuando se utiliza el Método Simplex se presupone que el problema esta planteado en esta forma.

Ya con esto, se puede replantear el problema de la siguiente forma: encontrar la solución no negativa del sistema de ecuaciones simultáneas

$$z - c'x = 0 \tag{1.3}$$

$$Ax + h = b \tag{1.4}$$

que maximice z.

Nótese que el sistema de ecuaciones simultáneas que realmente se tiene que resolver es 1.4, ya que con una solución x de él, queda definido el valor de z. La razón por la que se incorpora 1.3 es para obtener simultáneamente el valor de z.

Como el rango de $\mathbf{A}$ es m, con $m < n$, para encontrar una solución factible de 1.4, basta seleccionar m columnas de $\mathbf{A}$, hacer cero las variables restantes y resolver el sistema de ecuaciones resultante. A este tipo de soluciones se les denomina como básicas.

Para el ejemplo, se puede hacer $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ obteniendo que $h_1 = 1000, h_2 = 1200$ y $h_3 = 2000$. La solución se obtiene rápidamente porque las variables h_1, h_2 y h_3 están aisladas; si se desea una solución, en la que por ejemplo x sea positiva, entonces basta aislarla y repetir el procedimiento. Si al sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & -3{,}0x_1 & -3{,}0x_2 & -5{,}0x_3 & & & & = & 0 & & (R1) \\
 & 1{,}2x_1 & +1{,}7x_2 & +1{,}2x_3 & +h_1 & & & = & 1000 & & (R2) \\
 & 0{,}8x_1 & & +2{,}3x_3 & & +h_2 & & = & 1200 & & (R3) \\
 & 2{,}0x_1 & +3{,}0x_2 & +4{,}5x_3 & & & +h_3 & = & 2000 & & (R4)
\end{array}
$$

se le aplican las siguientes operaciones elementales: se divide R_2 por 1,2; a R_1 se le suma 3 veces R_2 ; a R_3 se le resta 0,8 veces R_2 y a R_4 se le resta 2 veces R_2 (las últimas tres operaciones se realizan con R_2 modificada) se obtiene el sistema:

$$
\begin{array}{llllllll}
z & +1{,}248x_2 & -2{,}0x_3 & +2{,}5h_1 & & & = & 2500{,}00 \\
x_1 & +1{,}416x_2 & +x_3 & +0{,}83h_1 & & & = & 833{,}33 \\
 & -1{,}133x_2 & +1{,}5x_3 & -0{,}66h_1 & +h_2 & & = & 533{,}33 \\
 & 0{,}166x_2 & +2{,}5x_3 & -1{,}66h_1 & & +h_3 & = & 333{,}33
\end{array}
$$

obteniendo la solución $x_1 = 833{,}33$, $h_2 = 533{,}33$, y $h_3 = 333{,}33$. Además, el valor de la función objetivo correspondiente se encuentra en el lado derecho de la primera ecuación ($z = 2,500$), ya que ninguna de las variables aisladas aparecen en ella.

Se puede continuar con este procedimiento, que dicho sea de paso, es el Método de Gauss-Jordan, sin embargo, hasta el momento nada garantiza que este proceso conduzca a una solución óptima, aunque como veremos posteriormente, este procedimiento prácticamente es el Método Simplex.

Definición 3. *A un subconjunto $B \subseteq \{1, ..., n\}$ tal que $|B| = m$, se le llama base.*

Intuitivamente, B contiene a los índices de las variables aisladas.

Definición 4. *A una solución factible se le llama solución básica factible si $x_j = 0$ para $j \notin B$.*

Teorema 1. *Si hay una solución óptima para 1.2, entonces hay una solución básica óptima para él.*

El teorema anterior asegura que en caso de que el problema tenga solución entonces existe una que a lo más tiene m coordenadas positivas y como sólo hay un número finito de ellas se puede utilizar el procedimiento anterior para analizarlas. Un problema adicional es que no siempre se puede encontrar una solución inicial agregando variables de holgura, este es el caso cuando el planteamiento inicial del problema ya contiene una ecuación como restricción. Este problema se comentará posteriormente, sin embargo, provisionalmente haremos el siguiente supuesto:

supuesto momentáneo 1: Se cuenta con una solución básica inicial.

2. Solución del Problema.

Dada una base B, se denotará por:

$c_B = (c_j)_{j\in B}$
$x_B = (x_j)_{j\in B}$
$\mathbf{A}_B = (\mathbf{A}_j)_{j\in B}$ donde $\mathbf{A}_j$ denota la j-ésima columna de $\mathbf{A}$.

Esto permite definir los siguientes productos:

$c'_B x_B = \sum_{j \in B} c_j x_j$
$\mathbf{A}_B x_B = \sum_{j \in B} \mathbf{A}_j x_j$

Ahora supóngase que se tiene una solución básica inicial para la base B y los dos siguientes supuestos que se analizarán posteriormente:

supuesto momentáneo 2: $b \geq 0$.
supuesto momentáneo 3: $\mathbf{A}_B$ es no singular.

Si se desea introducir $k \notin B$ a la base (se desea una solución donde x_k sea positiva) entonces se tiene por (1.2.2) que:

$$\mathbf{A}_B x_B = b$$

además, como $\mathbf{A}$ es no singular existe un vector de coordenadas $T_k \in \mathbb{R}^m$ de $\mathbf{A}_k$ en términos de la base que forman las columnas de $\mathbf{A}_B$ en $\mathbb{R}^m$, es decir:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_B T_k \tag{2.1}$$

de donde, para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}_B x_B = \mathbf{A}_B x_B + \theta \mathbf{A}_k - \theta \mathbf{A}_k = b$$
$$\mathbf{A}_B (x_B - \theta T_k) + \theta \mathbf{A}_k = b$$

CIMAT

entonces

$$\widetilde{x}_i(\theta) = \begin{cases} x_i - \theta t_{ik} & \text{si } i \in B \\ \theta & \text{si } i = k \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{2.2}$$

satisface 1.2.2 para toda $\theta \in \mathbb{R}$.

supuesto momentáneo 4: existe $t_{ik} > 0$, $i \in B$.

Sea

$$\widetilde{\theta} = \text{mín}\{\frac{x_i}{t_{ik}} | i \in B, t_{ik} > 0\} = \frac{x_l}{t_{lk}} \tag{2.3}$$

entonces

a) $\widetilde{x}(\widetilde{\theta}) = \widetilde{x}$ es factible en 2.

b) $\widetilde{x}_l = 0$ y $\widetilde{x}_k = \widetilde{\theta}$.

c) $\widetilde{z} = c'\widetilde{x} = c'_B(x_B - \theta T_k) + \widetilde{\theta} c_k = z - \widetilde{x}_k(z_k - c_k)$ donde

$$z_k = c'_B T_k. \tag{2.4}$$

Del inciso c) se desprende que si se parte de una variable x_k (la variable que se desea aislar) tal que $z_k - c_k < 0$, entonces la función objetivo mejora. Más aún, mejora $\widetilde{x}_k$

veces $-(z_k - c_k)$. Los incisos a) y b) proporcionan una nueva base $\widetilde{B} = B \backslash \{l\} \cup \{k\}$. En otras palabras, con el procedimiento anterior, a partir de una solución básica, se genera otra solución básica mejor. La idea es repetir este procedimiento mientras se pueda. Además, si ya no se puede repetir el procedimiento, se ha resuelto el problema. Este procedimiento es la esencia del Método Simplex, para tenerlo completo sólo faltan algunos detalles.

a) Con el fin de encontrar $\widetilde{x}$, es conveniente ampliar el procedimiento para ir obteniendo los valores de T_k y $z_k - c_k$ que correspondan a la base corriente. Esto conduce esencialmente a adoptar el Método Gauss-Jordan, éste se lleva a cabo trabajando únicamente con los coeficientes de las variables.

b) En el Método Simplex se opta, al seleccionar la x_k, por elegir la que tenga la $z_k - c_k$ más pequeña dentro de las negativas. Esto no necesariamente conlleva a elegir la mejor de ellas, pero esta selección es fácil de llevar a cabo en la práctica.

c) La ecuación 4 se puede extender a las variables básicas, la cual se puede expresar como:

$$T = \mathbf{A}_B^{-1} A \tag{2.5}$$

recuerde que la columna T_j contiene las coordenadas de $\mathbf{A}_j$ con respecto a la base formada por las columnas de $\mathbf{A}_B$.

d) Supóngase que se ha llegado a una base para la cual no existe $(z_k - c_k) < 0$. Esto significa en notación matricial, utilizando la definición de z_k en 2.4, la definición de T en 2.1 y el supuesto 3, que:

$$c'_B T = c'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A} \geq c'$$

pero esto significa que $\widetilde{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} b$ es una solución óptima, ya que si x es tal que $\mathbf{A}x = b$ y $x \geq 0$, entonces:

$$c'x \leq c'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}x = c'_B \mathbf{A}_B^{-1} b = c'_B \widetilde{x}_B$$

es decir, si no hay $(z_k - c_k) < 0$, $k \notin B$, ya no es posible encontrar una mejor solución básica y por el teorema 1 se ha encontrado el óptimo.

e) Si se introduce una variable x_k para la cual $z_k - c_k < 0$ y en la ecuación 2.3 no existe $t_{ik} > 0$, $i \in B$, entonces la función objetivo puede crecer indefinidamente ya que $\widetilde{x}(\theta)$ satisface 1.2.2. para toda θ, $\widetilde{x}(\theta)$ es no negativa para toda $\theta \geq 0$ y la función objetivo se incrementa en $-(z_k - c_k)$ por cada unidad que se incremente θ. Este comentario elimina el supuesto 4.

CIMAT

f) En el caso de que se este minimizando, al seleccionar la variable que entra a la base sólo se deben considerar aquellas para las cuales $z_k - c_k > 0$ y se termina cuando ya no hay positivas.

g) Se supone que $b \geq 0$ ya que de lo contrario si se inicia procediendo como en el ejemplo, la primera solución que se obtiene es $h = b$ no sería factible. Si algún b_i es negativo, basta multiplicar la desigualdad correspondiente por -1 (lo cual elimina el supuesto 2).

3. El Método Simplex.

3.1. Como iniciar. Si se desea utilizar el método simplex para resolver un problema de programación lineal, se necesita llevar el problema a su forma estandard. Esto se puede hacer de la siguiente forma:

a) Recurrir a $\min c'x = -\max -c'x$, si es necesario.

b) Si $b_i < 0$ en alguna restricción, multiplicarla por -1.

c) Si $x_j \leq 0$, se sustituye por $x_j = -x'_j$.

d) Si x_j libre (carece de la restricción de no negatividad), sustituirla por $x_j = x_j^+ - x_j^-$, donde,

$$x_j^+ = \begin{cases} x_j & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \qquad x_j^- = \begin{cases} -x_j & \text{si } x_j < 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

e) A cada restricción de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, agregarle una variable de holgura.

f) A cada restricción de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, agregarle una variable de holgura negativa y otra artificial.

g) A cada restricción de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, agregarle una variable artificial.

h) Solución básica inicial:
- Método de la "M grande".
- Método de las dos faces.

Esto elimina el supuesto momentáneo 1.

3.2. Como iterar. A cada base se le asocia una tabla la cual contiene:

	$(z_j - c_j)$	z
B	T	x_B

1. Se encuentra una solución básica inicial y su tabla correspondiente. En el caso de tener un problema en forma canónica esta queda de la siguiente forma:

	$-c'$	0	0
B	A	I	b

2. Se itera de la siguiente forma:
   $a)$ Se selecciona k tal que:

$$z_k - c_k = \min\{z_j - c_j | (z_j - c_j) < 0, j \notin B\}. \tag{3.1}$$

Si no existe $(z_j - c_j) < 0$ la solución corriente es óptima.

CIMAT

b) Se selecciona l de acuerdo a (2.3):

$$\frac{x_l}{t_{lk}} = \text{mín}\{\frac{x_i}{t_{ik}} | i \in B, t_{ik} > 0\}.$$

Si no existe $t_{ik} > 0$ la función objetivo puede crecer indefinidamente.

c) Se realiza el cambio de base: Se divide el renglón de la tabla que corresponde a l por t_{lk}. A cada uno de los otros renglones de la tabla, digamos el i, se le resta t_{ik} veces el renglón corregido. Se sustituye k por l en la base.

Comentarios:

a) Se puede demostrar, aunque en algunos casos con bastante álgebra, que los valores que se van obteniendo para la nueva tabla, corresponden a los teóricos.

b) Si se parte de una matriz $\mathbf{A}_B$ no singular, las sucesivas también lo son.

c) Si se utilizó el método de la "M grande" para encontrar una solución básica inicial y en la solución óptima aparece una variable artificial a nivel positivo entonces el problema original no tiene solución factible. Si se utiliza el método de las dos fases y el óptimo en la primera de ellas no es cero, el problema original no tiene solución factible.

d) Si después de resolver el problema, se forza a entrar a la base a una variable $k \notin B$, por la ecuación 2.4, la función objetivo disminuye en $-(z_k - c_k)x_k$.

3.3. Ejemplo.

	sillas	bancas	mesas	+dobla	+armado	+tubo	lado der.
	-3.0000	-3.0000	-5.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
+dobla	11.2000	1.7000	1.2000	1.0000	0.0000	0.0000	11000.00
+armad	10.8000	0.0000	2.3000	0.0000	1.0000	0.0000	11200.00
+tubo	2.0000	3.0000	4.5000	0.0000	0.0000	1.0000	12000.00

	sillas	bancas	mesas	+dobla	+armado	+tubo	lado der.
	-0.7778	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	1.1111	2222.2222
+dobla	0.6667	0.9000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.2667	466.6667
+armad	-0.2222	-1.5333	0.0000	0.0000	1.0000	-0.5111	177.7778
mesas	0.4444	0.6667	1.0000	0.0000	0.0000	0.2222	444.4444

CIMAT

	sillas	bancas	mesas	+dobla	+armado	+tubo	lado der.
	0.0000	1.3833	0.0000	1.1667	0.0000	0.8000	2766.6667
sillas	1.0000	1.3500	0.0000	1.5000	0.0000	-0.4000	700.0000
+armad	0.0000	-1.2333	0.0000	0.3333	1.0000	-0.6000	333.3333
mesas	0.0000	0.0667	1.0000	-0.6667	0.0000	0.4000	133.3333

4. Dualidad.

En el caso general, el problema dual se construye de la siguiente manera:

Primal	Dual
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	y_i libre
$x_j \geq 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j$
$x_j \leq 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$
x_j libre	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$
$\text{máx} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

En el caso de haber resuelto el problema con el Método Simplex, se tiene el siguiente par de problemas duales:

$$
\begin{array}{rrl}
P(b): & \max & c'x \\
& \text{s.a.} & \mathbf{A}x = b \\
& & x \geq 0
\end{array}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
D(b): & \min & b'y \\
& \text{s.a.} & y'\mathbf{A} \geq c' \\
& & y \text{ libre}
\end{array}
\tag{4.2}
$$

Para este caso se tienen los siguientes resultados, donde $S = \{x|\mathbf{A}x = b,\, x \geq 0\}$ y $R = \{y|y'\mathbf{A} \geq c'\}$.

Teorema 2. *Si $x \in S$ y $y \in R$ entonces $c'x \leq b'y$.*

Demostración. Sean x y y tales que $\mathbf{A}x = b$, $x \geq 0$ y $y'\mathbf{A} \geq c'$, entonces:

$$y'\mathbf{A}x = y'b \text{ y } y'\mathbf{A}x \geq c'x$$

de donde $c'x \leq b'y$.

Lema 1. *(Farkas-Minkowski) Existe* $x \geq 0$*, tal que* $Ax = b$ *si y sólo si* $p'A \geq 0$ *implica* $p'b \geq 0$.

Lema 2. *Si* S *y* R *son no vacíos entonces existen* x *y* y *tales que* $\mathbf{A}x = b$, $x \geq 0$, $y'\mathbf{A} \geq c'$ *y* $c'x = b'y$.

Demostración.- Reemplazando A, x, b y p en el lema de Farkas-Minkouski por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}' & \mathbf{A}' & I & 0 \\ -c' & b' & -b' & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p \\ q \\ \theta \end{bmatrix}$$

respectivamente, el lema queda refraceado como:

Existen $x \geq 0$ y $y = y^+ - y^-$ tales que $\mathbf{A}x = b$, $y'\mathbf{A} \geq c'$ y $c'x \geq b'y$ si y sólo si $\mathbf{A}q = \theta b$, $p'\mathbf{A} \geq \theta c'$, $q, \theta \geq 0$ implican $b'p \geq c'p$.

Se asevera que si $S, R \neq \emptyset$ entonces está última implicación se satisface. Si $\theta > 0$ entonces premultiplicando $\mathbf{A}q = \theta b$ por p' y posmultiplicando $p'\mathbf{A} \geq \theta c'$ por $q \geq 0$, se obtiene que:

$$\theta c'q \leq p'\mathbf{A}q = \theta p'q$$

de donde $c'q \leq p'b$. Y si $\theta = 0$, entonces hay que demostrar que $\mathbf{A}q = 0$, $p'\mathbf{A} \geq 0$, $q \geq 0$ implica $p'b \geq c'q$. Sean $\overline{x} \in S$ y $\overline{y} \in R$, entonces

$p'b \geq p'\mathbf{A}\overline{x} \geq 0$ ya que $p'\mathbf{A} \geq 0$ y $\overline{x} \geq 0$.

$c'q \leq \overline{y}'\mathbf{A}q = 0$ ya que $\mathbf{A}q = 0$.

de donde $p'b \geq c'q$. Y la demostración se sigue del lema 1.

Teorema 3. *Los vectores x y y son óptimos de (4.1) y (4.2) respectivamente si y sólo si $c'x = b'y$, $x \in S$ y $y \in R$.*

Demostración. Si $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son óptimos, entonces S, $R \neq \emptyset$ y por el lema 2 existen x y y tales que $\mathbf{A}x = b$, $x \geq 0$, $y'\mathbf{A} \geq c'$ y $c'x = b'y$. Como $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son óptimos,

$$c'\overline{x} \geq c'x = b'y \geq b'\overline{y}.$$

y el teorema 2 concluye la primera parte de la demostración.

Ahora, si $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son tales que $c'\overline{x} = b'\overline{y}$, $\overline{x} \in S$ y $\overline{y} \in R$, entonces como $\overline{y} \in R$, para toda $x \in S$ por el teorema 2 se tiene que,

$$c'x \leq b'\overline{y} = c'\overline{x}$$

es decir $\overline{x}$ es óptima en (4.1). De igual forma, como $\overline{x} \in S$, para toda $y \in R$ se tiene que:

$$b'y \leq c'\overline{x} = b'\overline{y}$$

y por lo tanto $\overline{y}$ es óptima en (4.2).

Teorema 4. *Si $x_B = \mathbf{A}_B^{-1}b$ es solución óptima de (4.1) entonces $y' = c'_B\mathbf{A}_B^{-1}$ es una solución óptima para (4.2). Además $c'x = b'y$.*

Demostración. Por el teorema 3, basta demostrar que $y \in R$ y $c'x = b'y$. Así,

$$y'\mathbf{A} - c' = c'_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} - c' = c'_BT - c' = (z_j - c_j) \geq 0$$

ya que la última desigualdad es la condición de optimalidad en el método simplex. Además, $c'_Bx_B = c'_B\mathbf{A}_B^{-1}b = y'b$.

4.1. Interpretación de las variables duales.

a) Si el problema se resuelve con un lado derecho b, obteniendo z_1^* como valor de la función objetivo y después se soluciona con un lado derecho igual a $\widehat{b} = b + e_i$,

CIMAT

obteniendo por solución a z_2^* con la misma base óptima entonces $y_i = z_2^* - z_1^*$. Efectivamente:

$$z_2^* = c'x = c'_B \mathbf{A}_B^{-1}(b + e_i) = y'b + y'e_i = z_1^* + y_i.$$

b) Se puede pensar a z como una función de b, de forma que si $z(b)$ denota el valor óptimo de la función objetivo del problema que tiene a b como lado derecho, entonces,

$$y_i = \frac{\partial z(b)}{\partial b_i}$$

ya que:

$$\begin{array}{lcl} z = \sum_{j \in B} c_j x_j & \Rightarrow & \frac{\partial z}{\partial x_k} = c_k \text{ para toda } k \in B \\ x_k = \sum_{j \in B} a_{kj}^{-1} b_j & \Rightarrow & \frac{\partial x_k}{\partial b_j} = a_{kj}^{-1} \text{ para toda } k \in B \end{array}$$

de donde

$$\frac{\partial z(b)}{\partial b_i} = \sum_{k \in B} \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_i} = \sum_{k \in B} c_k a_{ki}^{-1} = y_i$$

CIMAT

c) Supóngase que se tienen m insumos los cuales son utilizados para producir n productos. Si se supone que:

b_i es la cantidad disponible del insumo i

a_{ij} es la cantidad del insumo i necesario para producir una unidad del producto j

c_j es el beneficio que se obtiene por unidad producida del producto j

x_j es la cantidad a producir del producto j

se puede plantear el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c'x \\
\text{s.a.} \quad & \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Ahora bien, cada unidad del producto j ha utilizado a_{ij} unidades del insumo i. Así, se puede pensar que una unidad del producto j esta compuesto por el vector A_j de insumos. Nuevamente con la idea de poder decidir que insumos se deben aumentar o disminuir, de acuerdo al medio ambiente del problema, es válido preguntarse que precios $y' = (y_1, ..., y_m)$ deben de tener los insumos de tal manera que el valor total de ellos sea tan pequeño como sea posible, pero que el valor de los insumos que lleva incorporado una unidad del producto j, sea cuando menos la aportación que esta unidad hace a la función objetivo. La respuesta, al menos localmente, es que resulta indistinto cambiar una unidad del insumo i por y_i unidades de beneficio e incorporar esa unidad a la producción.

Cuando la base B tiene asociada una solución óptima y se trata de un problema económico, a la coordenadas de y se les denomina precios sombra. Es decir, los precios sombra asociados a la base óptima B, se definen como $y' = c'_B \mathbf{A}_B^{-1}$.

4.2. Condiciones Kuhn-Tucker. En esta sección se considera el par de problemas duales:

$$
\begin{aligned}
P(b): \ \max \ & z = c'x \\
\text{s.a.} \ & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
D(b): \ \min \ & w = b'y \\
\text{s.a.} \ & y'A \geq c' \\
& y \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

y se denotará por $S = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $R = \{y | y'A \geq c', \, y \geq 0\}$.

Teorema 5. *Si $x \in S$ y $y \in R$ entonces $c'x \leq b'y$.*

La demostración es similar a la del teorema 2.

Lema 3. *Si $S, R \neq \emptyset$ entonces existen x y y tales que $Ax \leq b, x \geq 0$, $y'A \geq c'$ y $c'x = b'y$.*

La demostración es similar a la del lema 2, pero reemplazando A, x, b y p por

$$\begin{bmatrix} 0 & A & I & 0 & 0 \\ -A' & 0 & 0 & I & 0 \\ b' & -c' & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y \\ x \\ w \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p \\ q \\ \theta \end{bmatrix}$$

Teorema 6. *Los vectores x y y son óptimos de (4.3) y (4.4) respectivamente si y sólo si $c'x = b'y$, $x \in S$ y $y \in R$.*

Teorema 7. *Los vectores x y y son óptimos de (4.3) y (4.4) respectivamente si y sólo si $x \in S$, $y \in R$, $y'(b - Ax) = 0$ y $(c' - y'A)x = 0$.*

5. Análisis de Sensibilidad.

En esta sección se establecen las bases para poder hacer un análisis posterior a la solución de un problema de programación lineal. Este análisis consiste en presuponer modificaciones en los datos del problema y recobrar la solución óptima sin incurrir en la tarea de resolver el nuevo problema desde su inicio. En problemas reales es conveniente contar con diferentes escenarios que reflejen las distintas opciones del medio ambiente en el que se desarrollan, ésto lleva implícito variaciones ficticias que posteriormente producen modificaciones reales las cuales conducirán al mejor escenario. Con el fin de fijar esta idea considérese el problema que se formuló al motivar dualidad y que consiste en la maximización del beneficio sujeto a los recursos disponibles, para este problema en particular es importante:

i) Analizar la posibilidad o rentabilidad de un nuevo producto.
ii) Detectar cuellos de botella.
iii) Cuantificar recursos en exceso con el fin de darles usos alternativos.
iv) Calcular el efecto que produce en la función objetivo un cambio en las cantidades de algunos recursos específicos y en su momento poder decidir no sólo

si el cambio es conveniente sino que en caso de que lo sea, el nivel al cual debe ser dado.

v) Calcular el mínimo beneficio que debe redituar un nuevo producto para que sea rentable.

Ahora bien, el recobrar la solución óptima no es más que determinar los valores $\widehat{z}$, $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$ óptimos que corresponden al problema modificado. En este punto convendrá distinguir cuando las modificaciones producen un cambio de base.

Se supondrán dos cosas: que se han resuelto un par de problemas de la forma:

$$\begin{aligned} P(b):\ \max\ & z = c'x \\ \text{s.a. } & \mathbf{A}x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} D(b):\ \min\ & w = b'y \\ \text{s.a. } & y'\mathbf{A} \geq c' \\ & y \text{ libre} \end{aligned} \tag{5.2}$$

obteniendo a B como base óptima y $\mathbf{A}_B^{-1}$ como la inversa de la matriz básica correspondiente y que posteriormente se han modificado los parámetros del problema. Se desea resolver el problema con los nuevos parámetros apoyándose en la solución del problema original.

Un problema de programación lineal queda prácticamente resuelto si se cuenta con una base óptima B, ya que a partir de $\mathbf{A}_B^{-1}$ se pueden determinar fácilmente los tres elementos principales de la solución del problema:

variables de decisión: $x_B = \mathbf{A}_B^{-1} b$
valor de la función objetivo: $z = c'_B x_B$
variables duales: $y' = c'_B \mathbf{A}_B^{-1}$

Si para el problema modificado la base óptima sigue siendo la misma, su solución se puede calcular mediante las relaciones anteriores. Esto crea la necesidad de determinar la región donde se preserva la base. Se dirá que no hay cambio de base (NCB), si los dos problemas (el original y el modificado) admiten la misma base óptima. Los cambios más comúnes son: $\widehat{b} = b+\theta d$ y $\widehat{c} = c+\theta f$, y son los únicos que se consideran en este trabajo.

Teorema 8. *NCB para $\widehat{b} = b+\theta d$ si y sólo si $\theta \mathbf{A}_B^{-1} d \geq -x_B$.*

Demostración.- Al cambiar b por $b+\theta d$ se obtienen los siguientes problemas duales:

$$
\begin{aligned}
& max \quad z = c'x \\
(5.3) \qquad & \text{s.a.} \quad \mathbf{A}x = b + \theta d \\
& \qquad\quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& min \quad w = (b + \theta d)'y \\
(5.4) \qquad & \text{s.a.} \quad y'\mathbf{A} \geq c' \\
& \qquad\quad y \text{ libre}
\end{aligned}
$$

Si no hay cambio de base al sustituir b por $b + \theta d$, entonces $x_B = \mathbf{A}_B^{-1}(b + \theta d)$ es solución óptima de (5.3), en particular $x_B \geq 0$, de donde: $0 \leq x_B = \mathbf{A}_B^{-1}(b + \theta d) = x_B + \theta \mathbf{A}_B^{-1} d$ y por lo tanto: $\theta \mathbf{A}_B^{-1} d \geq -x_B$.

Ahora, si $\theta \mathbf{A}_B^{-1} d \geq -x_B$, se asevera que $x_B = \mathbf{A}_B^{-1}(b + \theta d)$ y $y' = c_B' \mathbf{A}_B^{-1}$ son solución óptima para (5.3) y (5.4) respectivamente. Para demostrarlo, se utiliza el teorema 3

.

Teorema 9. *NCB para $c = c + \theta f$ si y sólo si $\theta(f_B T_j - f_j) \geq -(z_j - c_j)$.*

Frecuentemente los reportes de los paquetes de computo comerciales, contienen los rangos que se obtienen cuando las direcciones d y f son los vectores de la base canónica correspondiente. Un listado típico es el siguiente:

Datos del problema:

	sillas	bancas	mesas		
	3.0	3.0	5.0		
doblado	1.2	1.7	1.2	<	1000.0
armado	0.8	0.0	2.3	<	1200.0
tubo	2.0	3.0	4.5	<	2000.0

tabla final

	sillas	bancas	mesas	+doblado	+armado	+tubo	lad. der.
	0.000	1.383	0.000	1.167	0.000	0.800	2766.667
sillas	1.000	1.350	0.000	1.500	0.000	-0.400	700.000
+armado	0.000	-1.233	0.000	0.333	1.000	-0.600	333.333

```
mesas       0.000   0.067   1.000  -0.667   0.000   0.400   133.333


Solucin ptima

 1.- Funcin objetivo y variables de decisin
       funcin obj.     2766.666667
       1.-sillas          700.000000
       5.-+armado         333.333333
       3.-mesas           133.333333
 2.- Precios sombra
       1.- doblado           1.166667
       2.- armado            0.000000
       3.- tubo              0.800000
 3.- Costos reducidos
       2.- bancas            1.383333
 4.- Rango de variacin de b
       1.- doblado        533.333333    1000.000000    1200.000000
```

2.- armado	866.666667	1200.000000	no acotado
3.- tubo	1666.666667	2000.000000	2555.555556

5.- Cambios en las variables al modificar b

variable	cota inf.		cota sup	
	entra	sale	entra	sale
1.- doblado	+tubo	sillas	+doblado	mesas
2.- armado	bancas	+armado		
3.- tubo	+doblado	mesas	bancas	+armado

6.- Rango de variacin de c

1.- sillas	2.222222	3.000000	5.000000
2.- bancas	no acotado	3.000000	4.383333
3.- mesas	3.000000	5.000000	6.750000

7.- Cambios de variables al modificar c

variable	cota inf.		cota sup.	
	entra	sale	entra	sale
1.- sillas	+doblado	sillas	+tubo	mesas
2.- bancas			bancas	sillas
3.- mesas	+tubo	mesas	+doblado	sillas

CIMAT

Si

a) ¿Cuál es la mezcla óptima de producción ?.

b) ¿Qué beneficio puede esperar la fabrica con esta mezcla de producción ?.

c) Un distribuidor local ha ofrecido vender tubo metálico a \$0.60 el metro, ¿cuánto se incrementa el beneficio si se compran 500 metros y se utilizan en forma óptima ?.

d) La compañia siente que debe producir cuando menos 100 bancas (con el fin de redondear su línea de producción), ¿qué efecto tendría en el beneficio ?.

e) El departamento de diseño ha modificado el diseño de la banca para hacerla más productiva. El nuevo diseño requiere 1.1 horas de doblado, 2 horas de armado y 2 metros de tubo. Si este nuevo producto puede ser vendido obteniendo un beneficio de \$3 por unidad, ¿qué efecto tendría en el beneficio total ?.

f) El departamento de ventas ha sugerido una tienda que requiere 1.8 horas de doblado, 0.5 hora de armado y 1.3 metros de tubo metálico. ¿Cuál es el beneficio mínimo por unidad que debe producir este producto para que sea rentable ?.

g) La compañia tiene la oportunidad de vender su capacidad de doblado de tubo a \$1.50 la hora. Si vende 200 horas a este precio, ¿cómo se alteraría su producción ?.

h) Si el beneficio de las sillas decrece a \$2.50, ¿qué mezcla de producción y beneficio óptimos se tendrían ?.

6. El Método Simplex Dual

Como antes, consideremos el problema

$$\begin{aligned} P(b):\ \max\ & c'x \\ \text{s.a.}\ & \mathbf{A}x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos una tabla del simplex donde $z_j - c_j \leq 0$ para toda j, pero donde algunas de las variables son negativas y por lo tanto no factibles.

$$\begin{aligned} &\text{elegir } l\text{:} \quad x_l = \text{mín}\{x_i < 0 | i \in B\} \\ &\text{elegir } k\text{:} \quad \tfrac{-(z_j - c_j)}{t_{lj}} = \text{mín}\{\tfrac{-(z_j - c_j)}{t_{lj}} | t_{lj} < 0\} \end{aligned}$$

Si no existe $t_{lj} < 0$ entonces el problema no es factible. Si no existe $x_i < 0$, ya se alcanzo el óptimo.

Observación: después de pivotear las $z_j - c_j$ permanecen positivas

$$(z_j - c_j) - (z_k - c_k)\frac{t_{lj}}{t_{lk}} \geq 0$$

si y sólo si

$$\frac{(z_j - c_j)}{t_{lj}} \leq \frac{(z_k - c_k)}{t_{lk}}$$

si y sólo si

$$\frac{-(z_j - c_j)}{t_{lj}} \geq \frac{-(z_k - c_k)}{t_{lk}}$$

6.1. Aplicación típica.

$$\begin{aligned} P(b): \ \text{mín} \ & c'x \\ \text{s.a.} \ & \mathbf{A}x \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $c \geq 0$ y b no necesariamente es no negativa.

El problema es equivalente a

$$\begin{aligned} P(b): \ \max \ & -c'x \\ \text{s.a.} \ & \mathbf{A}x - Iu = b \\ & x \geq 0, \, u \geq 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
P(b): & \max & -c'x \\
& \text{s.a.} & -\mathbf{A}x + Iu = -b \\
& & x \geq 0,\ u \geq 0
\end{array}
$$

Tabla correspondiente

	c'	0	0
B	$-A$	I	$-b$

Ejemplo

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{mín} & \multicolumn{5}{l}{z = 4x_1 + 3x_2 + x_3} \\
\text{s.a.} & & & & & \\
& 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & \geq & 6 \\
& 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq & 4 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Después de convertir el problema en uno de maximización, insertar variables de holgura u_1, $u_2 \geq 0$ y multiplicar por -1:

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	LD
	4	3	1	0	0	0
u_1	-2	5	-1	1	0	-6
u_2	-3	-2	-2	0	1	-4

$l = 1$ ya que $-6 < -4$
$k = 3$ ya que $\frac{-(z_3 - c_3)}{t_{13}} = \text{mín}\{\frac{-4}{-2}, \frac{-1}{-1}\}$
Pivoteando en t_{13} se obtiene

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	LD
	2	8	0	1	0	-6
x_3	2	-5	1	-1	0	6
u_2	3	-17	0	-3	1	14

7. Método Simplex Revisado

La idea es recortar las tablas para poder resolver problemas mas grandes. Sólo se tiene en memoria:

	y'	z
B	A_B^{-1}	x_B

y se tiene A, b y c en disco. Aunque ya no es el algoritmo que se usa en paquetes comerciales, afianza la comprensión del problema y si se reduce sustancialmente el uso de memoria de la computadora.

0 Inicio

Calcular: B, A_B^{-1}, x_B, y y z.

1 Iteración

a) Seleccionar k: $z_j - c_j = y'A_j - c_j$

b) $T_k = A_B^{-1}A_k$

c) Seleccionar l: $\frac{x_l}{t_{lk}} = \min\{\frac{x_i}{t_{ik}} | i \in B, t_{ik} > 0\}$.

d) Pivotear

e) $y' = c_B' A_B^{-1}$

	0	0	0
3	1	0	6
4	0	1	6

$$z_1 - c_1 = y'A_1 - c_1 = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$z_2 - c_2 = y'A_2 - c_2 = (0,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$T_1 = A_B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

	0	$\frac{1}{2}$	3
3	1	$-\frac{1}{2}$	3
1	0	$\frac{1}{2}$	3

$$z_2 - c_2 = y'A_2 - c_2 = (0,\tfrac{1}{2})\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$z_4 - c_4 = y'A_4 - c_4 = (0,\tfrac{1}{2})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \tfrac{1}{2}$$

$$T_2 = A_B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2

$$z_3 - c_3 = y'A_3 - c_3 = (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \tfrac{1}{3}$$

$$z_4 - c_4 = y'A_4 - c_4 = (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \tfrac{1}{3}$$

CIMAT

Si se inicia como es costumbre con $-c\prime$ en el renglón cero, las $z_j - c_j$ no son las correctas, en particular las $z_j - c_j$ correspondientes a la variables artificiales no son cero. Se corrige

- (Método de la M grande) restando al renglón cero M veces cada renglón con variable artificial.
- (Método de las dos fases) restando al renglón cero cada renglón con variable artificial.

8. Problema del transporte

m Orígenes.
n Destinos.
1 Solo producto.
a_i Cantidad disponible en el origen i (oferta).
b_i Cantidad requerida en el destino j (demanda).
c_{ij} Costo de traslado por unidad del origen i al destino j.
x_{ij} Cantidad a transportar del origen i al destino j.

Primal	Dual
$\min \; \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ $x_{ij} \geq 0$	$\max \; a'u + b'v$ $u_i + v_j \leq c_{ij}$ u, v libres

Supuesto:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Comentarios:

- Las "$z_j - c_j$" de este problema son $c_{ij} - u_i - v_j$ ya que la no negatividad de estas variables es equivalente a la factibilidad del dual. Cuándo para alguna solución factible se tenga que

$$c_{ij} - u_i - v_j \geq 0, \forall ij$$

  se ha llegado al óptimo.
- El supuesto hace que cualquiera de las restricciones del primal sea redundante. Por esta razón se considera que la base tiene $m + n - 1$ elementos ($|B| = m + n - 1$).

Ejemplo.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 10 \\ 80 \\ 55 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 75 \\ 20 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Estrategia: se parte de una solución básica inicial, se verifica si es óptima, si no lo és, se calcula una mejor solución básica.

a) Solución básica inicial: método de la esquina noroeste.

10			10
65	15		80
	5	50	55
75	20	50	

b) Verificar si la solución es óptima. Se lleva a cabo como es costumbre: se verifica que las "$z_j - c_j$" sean no negativas.

b.1 Se aprovecha que

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0 \quad \text{si } x_{ij} > 0$$

para calcular las variables duales u y v. Se le da valor arbitrario a alguna de las u_i o a una de las v_j y se desencadena el proceso.

u \ v	3	2	6	
2	5 10	3	1	10
0	3 65	2 15	5	80
2	6	4 5	8 50	55
	75	20	50	

b.2 Teniendo u y v se calculan las "$z_j - c_j$" para las variables no básicas

u \ v	3	2	6	
2	5 10	3 -1	1 -7	10
0	3 65	2 15	5 -1	80
2	6 1	4 5	8 50	55
	75	20	50	

c) Cálculo de una mejor solución:

v u				
	5	3	1 10	10
	3 75	2 5	5	80
	6	4 15	8 40	55
	75	20	50	

9. Ramificación y Acotamiento

Para utilizar la técnica de ramificación y acotamiento se necesitan definir tres procedimientos: selección (regla de la mejor cota o regla de la cota más reciente), ramificación y acotamiento.

$$\text{mín } f(x)$$

$$x \in S$$

Etapa 0 Inicio.
- $Z_U = \infty$
- $X \supseteq S$, $X \to Stack$
- Calcular $Z_L(X)$

Etapa 1 Selección: $R \in Stack$, si está vacio, fin.

Etapa 2 Sondeo
- Si $Z_L(R) \geq Z_U$, se elimina R.
- Si $R \cap S = \emptyset$, se elimina R.
- Si exite $x_R \in S$ tal que $Z_L(R) = f(x_R)$:
    - $Z_U = Z_L(R)$ y $x^* = x_R$

- Para cada $R \in Stack$, si $Z_L(R) \geq Z_U$, se elimina R.

Etapa 3 Si no se sondeo, se ramifíca R calculando $Z_L(T)$ y x_T para cada una de las partes. Cada $T \rightarrow Stack$. Regresar a la etapa 1.

9.1. Programación Binaria.

$$min\ z = c'x$$
$$Ax \geq b$$
$$x_j \text{ binaria}$$

Supuesto: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.
$S = \{x \in R^n | Ax \geq b, x_j \text{ binaria}\}$
$X = \{x \in R^n | x_j \text{ binaria}\}$
Se ramifica con la regla de la cota más reciente.

Acotamiento:

$$Z_L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} c_j x_j, & \text{si } x_N = 1 \\ \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j + c_{N+1}, & \text{si } x_N = 0 \end{cases}$$

Sondeo:

CIMAT

- $R \cap S = \emptyset$
  $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j + \sum_{j=N+1}^{n} max\{a_{i,j}, 0\} < b_i$ para alguna i.
- $x_R \in S$
  $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j + a_{i,N+1}(1 - x_N) > b_i$ para toda i.